Лекция 7.
Исследование функций

7-1 Цели и стадии исследования функций
7-2 Возрастание и убывание. Точки экстремума
7-3 Выпуклость и вогнутость, точки перегиба
7-4 Асимптоты графика функций
7-5 Построение графиков функций

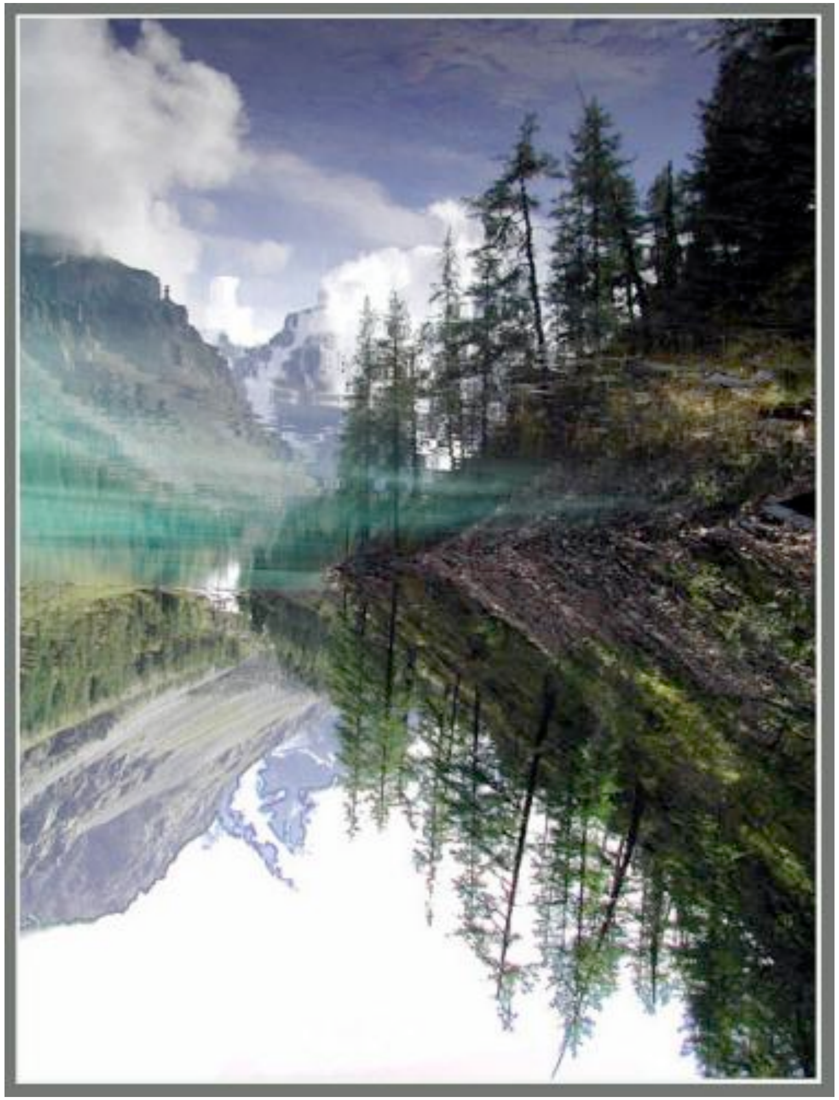
Эпиграф

Следует помнить, что в каком-то смысле высшая математика проще элементарной.

Исследовать, например, лесную чащу пешком очень трудно, с самолета это делается проще.

У.Сойер

Английский математик и педагог



7-1. Цели и стадии исследования функций

Подход к исследованию функций

Цели исследования функций

Исследование функции проводят для того, чтобы описать при помощи текста и (или) графически поведение функции для всех возможных значений аргумента.

Исследование функций проводят в несколько стадий.

Стадии исследования функций

Шаг 1. Найти область определения функции.

Шаг 2*. Исследовать функцию на четность-нечетность.

Шаг 3. Исследовать поведение функции вблизи границ области определения и точек разрыва.

Шаг 4. Найти экстремумы, интервалы возрастания и убывания.

Шаг 5*. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

Шаг 6. Найти точки пересечения с осями координат, другие вспомогательные точки.

Шаг 7. Построить асимптоты.

Шаг 8. Завершить построение графика.

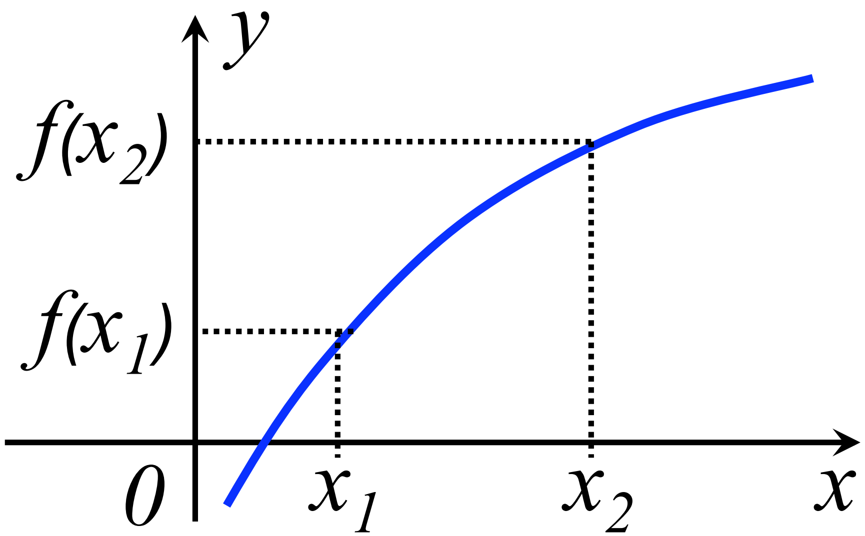
7-2.
Возрастание и убывание. Точки экстремума

Понятие возрастания (убывания) функции
Необходимое и достаточное условия монотонности
Понятие экстремума
Необходимое и достаточное условия экстремума

Возрастание (убывание) функции

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

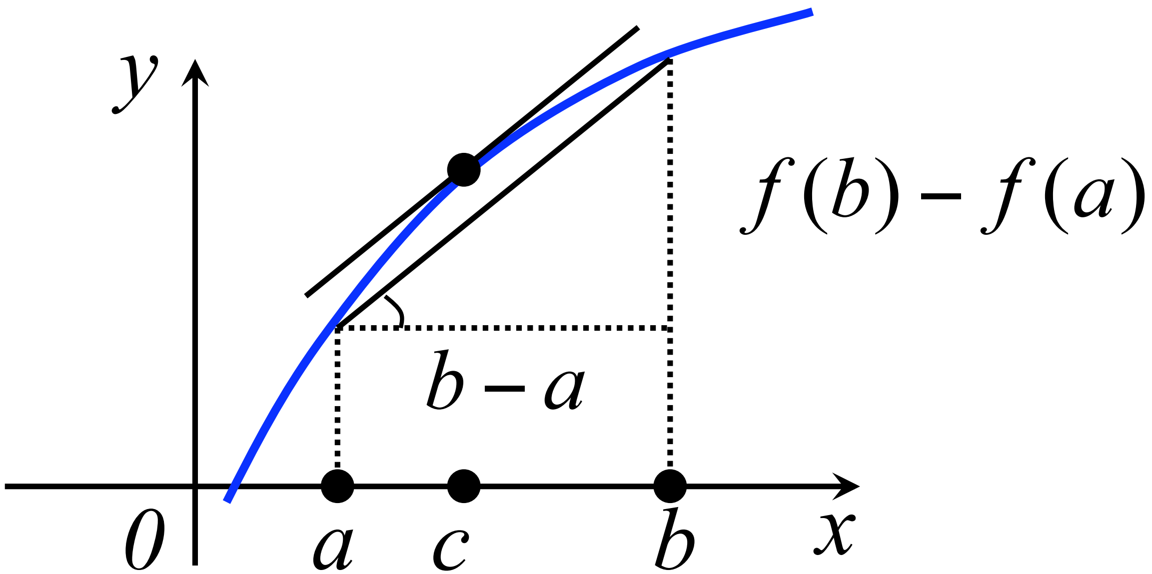


Самостоятельно дайте определение убывающей функции, невозрастающей функции.

Теорема Лагранжа

Теорема о конечном приращении. Если функция непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема в интервале (a, b), то существует такая точка c ∈ (a, b), что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Достаточное условие монотонности

Теорема. Если производная дифференцируемой функции **положительна** внутри некоторого промежутка X, то функция **возрастает** в этом промежутке.

Доказательство. Выберем в этом промежутке два значения:

$$x_2 > x_1$$

Для функции выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad \xi \in X$$

Поскольку производная положительна, то

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

И это означает, что $f(x_2) > f(x_1)$ □

Самостоятельно докажите, что если производная отрицательна, то функция убывает.

Необходимое условие монотонности

Если функция **возрастает** на некотором промежутке X, то производная **неотрицательна** на этом промежутке:

$$f'(x) \geq 0$$

Если функция **убывает** на некотором промежутке X, то производная **неположительна** на этом промежутке:

$$f'(x) \leq 0$$

Экстремум функции

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(x_0)$$

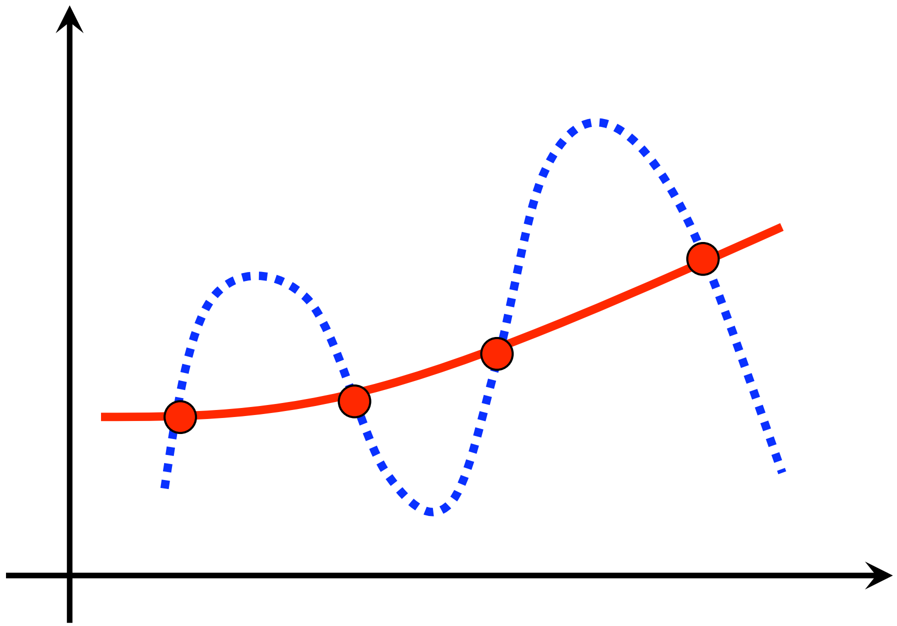
Точка x_1 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство:

$$f(x) \ge f(x_1)$$

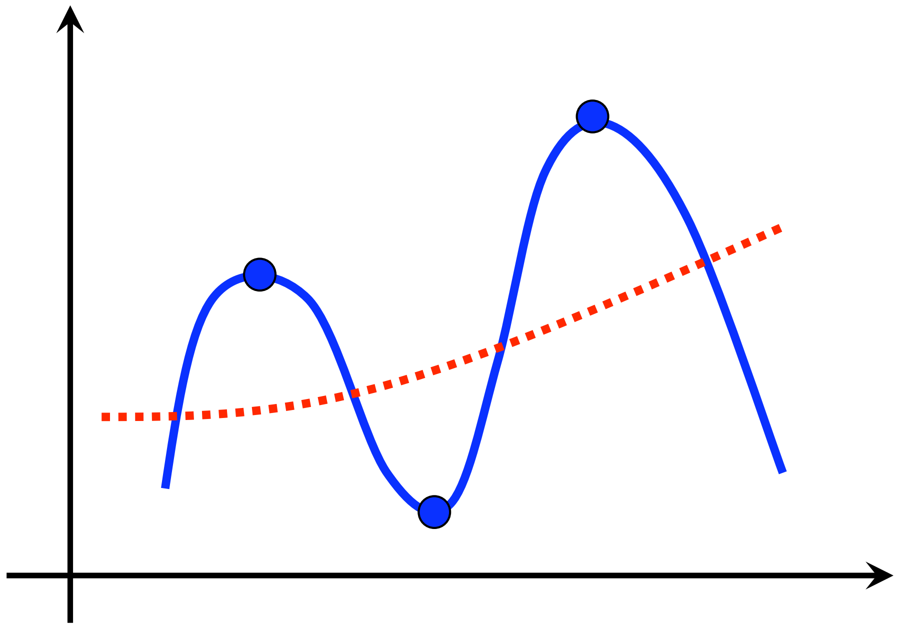
Значения функции в точках минимума и максимума называются **минимумом** и **максимумом** функции, или ее **экстремумом**.

Почему надо находить экстремумы

При построении графика мы находим некоторые точки и соединяем их сплошной линией. Мы можем построить неверный график, если не исследуем экстремумы и выбираем точки произвольно.



Неверно

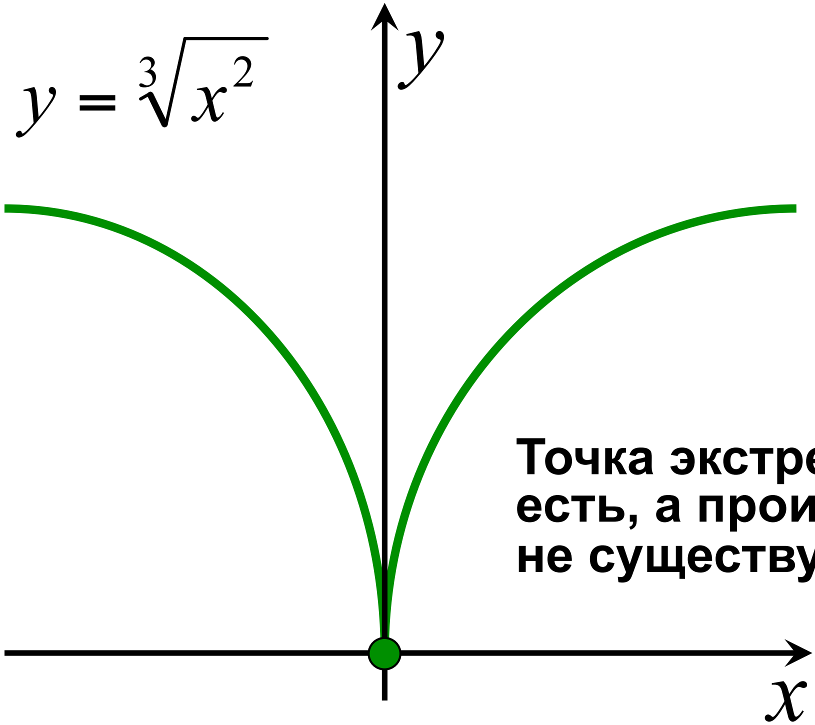


Верно

Необходимое условие экстремума

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела экстремум в точке x_0, **необходимо**, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

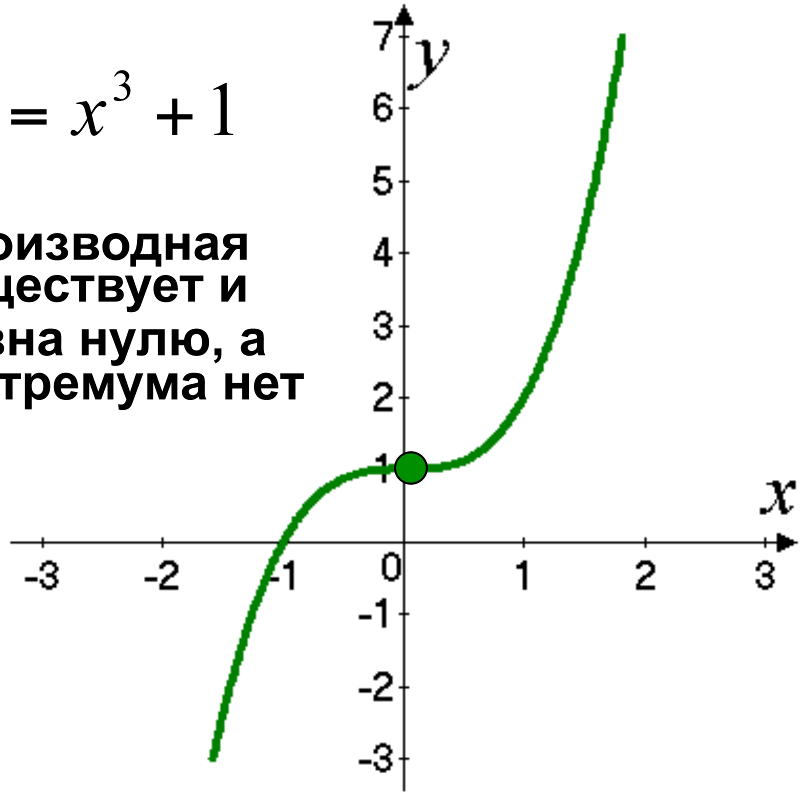
$$y = \sqrt[3]{x^2}$$



Точка экстремума есть, а производная не существует

$$y = x^3 + 1$$

Производная существует и равна нулю, а экстремума нет



Достаточное условие экстремума

Теорема. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции, а если с минуса на плюс, – то точка минимума.

Доказательство. Пусть в некотором интервале (a, x_0) производная положительна, а в некотором интервале (x_0, b) отрицательна. Тогда функция в первом интервале возрастает, а во втором убывает. Это означает, что $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (a, b)$. Следовательно, это точка максимума. Для минимума доказательство аналогично. $\square$

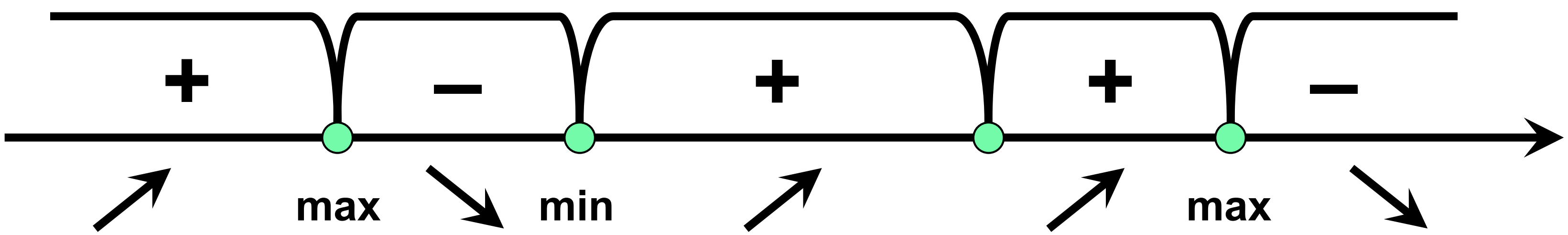
Схема исследования экстремумов

Шаг 1. Находим **производную**.

Шаг 2. Определяем **критические точки** функции (в которых производная равна нулю или не существует).

Шаг 3. Отмечаем на числовой оси критические точки и находим **знак производной** в каждом из интервалов области определения. Находим точки экстремума.

Шаг 4. Вычисляем **экстремумы** (значение функции в точках экстремума).



7-3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Понятие выпуклости

Достаточное условие выпуклости

Точки перегиба

Достаточное условие перегиба

Выпуклость графика функции

График дифференцируемой функции называется **выпуклым вниз** в данном промежутке, если соответствующая часть графика расположена выше касательной, проведенной в любой точке промежутка.

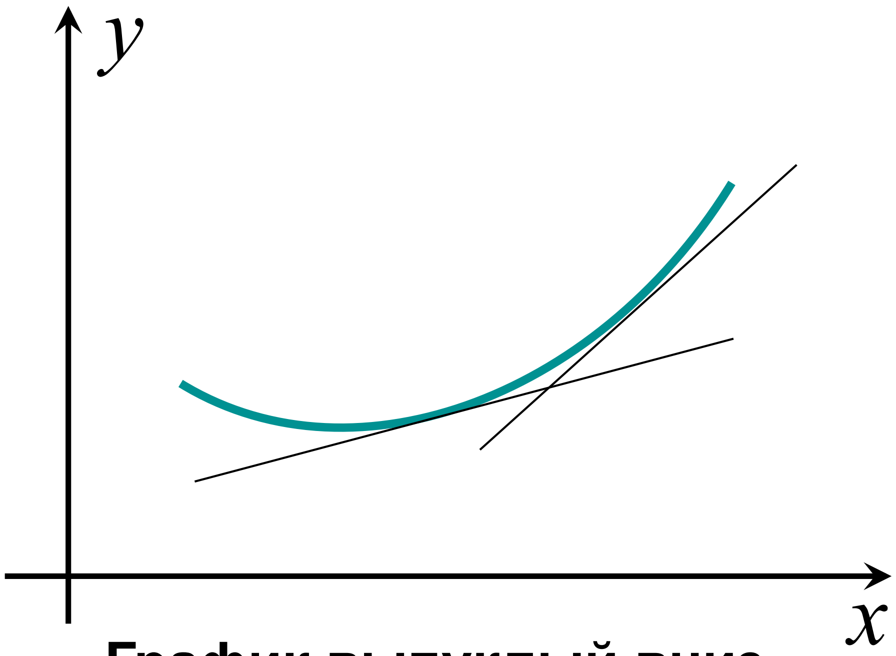


График выпуклый вниз

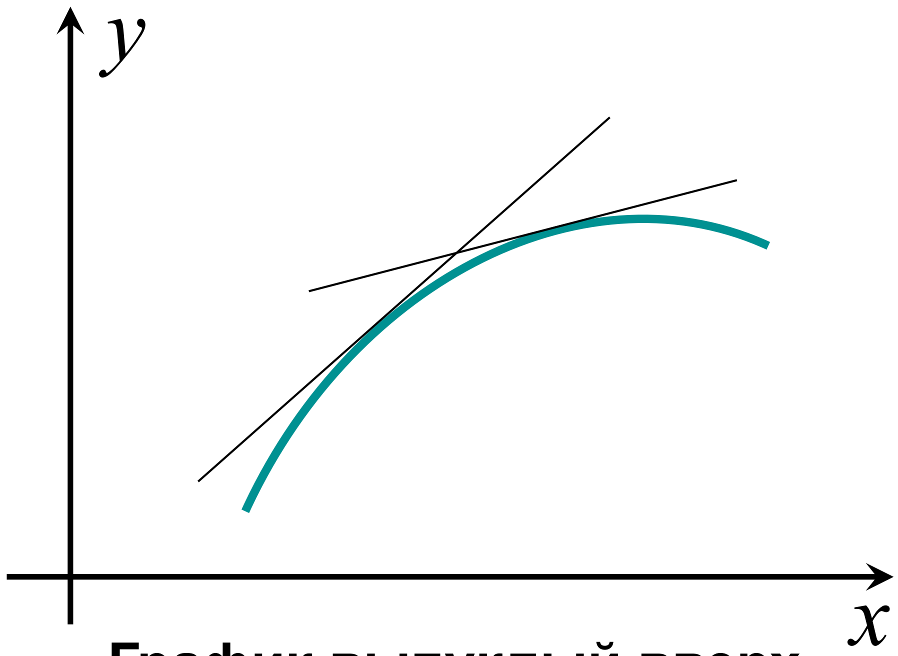
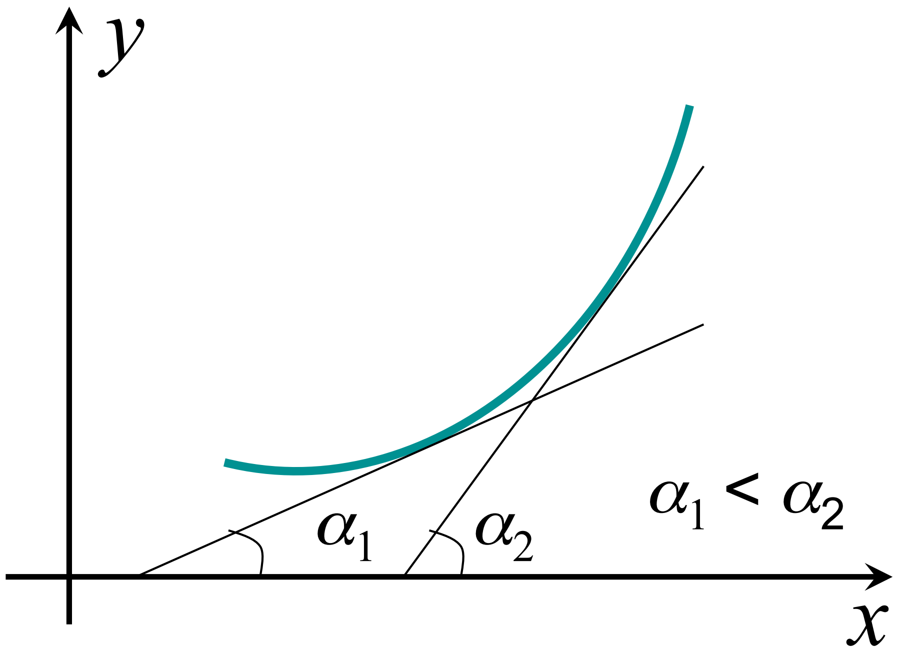


График выпуклый вверх

Достаточное условие выпуклости

Утверждение. Если вторая производная функции положительна внутри некоторого промежутка X, то эта функция выпукла вниз на этом промежутке.



Приведите пример функции, выпуклой вверх, и функции, выпуклой вниз на некотором интервале.

Точка перегиба

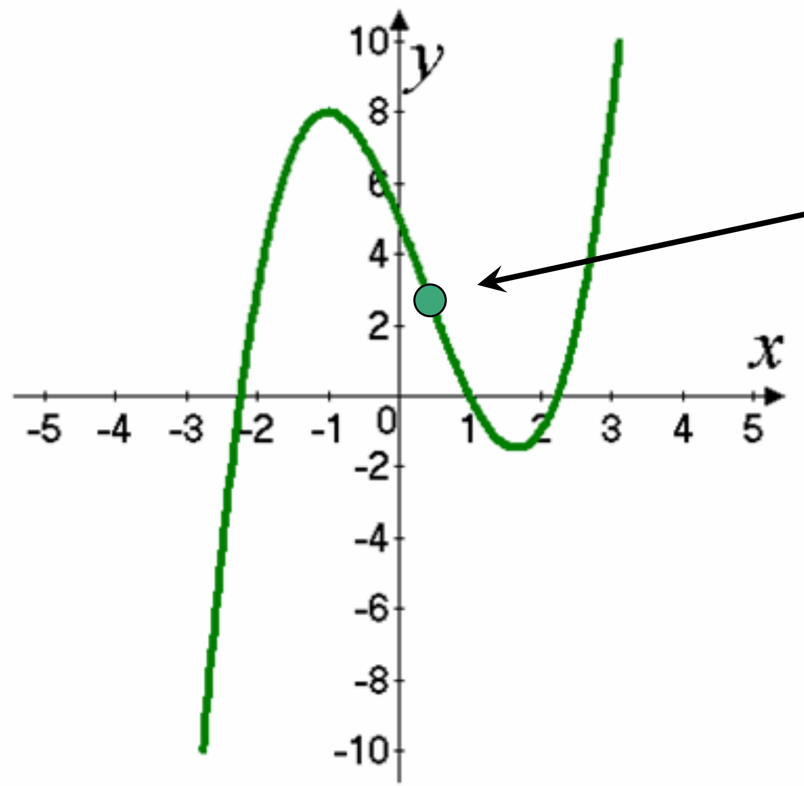
Точкой перегиба (inflection point) графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Теорема (необходимое условие перегиба). Вторая производная дважды дифференцируемой функции в точке перегиба равна нулю:

$$f''(x) = 0$$

Достаточное условие перегиба

Теорема. Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет знак, то x_0 есть точка перегиба графика.



Точка перегиба

Отметим также, что если критическая точка дифференцируемой функции не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.

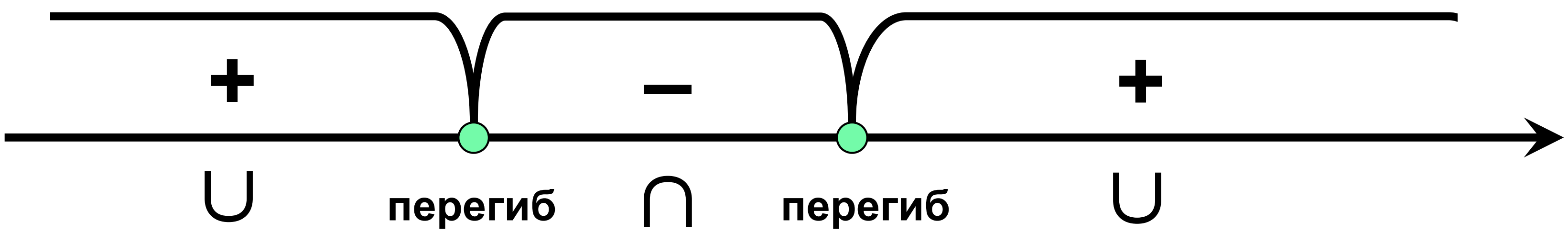
Схема исследования на выпуклость

Шаг 1. Находим **вторую производную** функции.

Шаг 2. Определяем точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

Шаг 3. Определяем знак второй производной в каждом из интервалов. Находим **точки перегиба**.

Шаг 4. Находим **значение функции** в точках перегиба.



7-4. Асимптоты графика функций

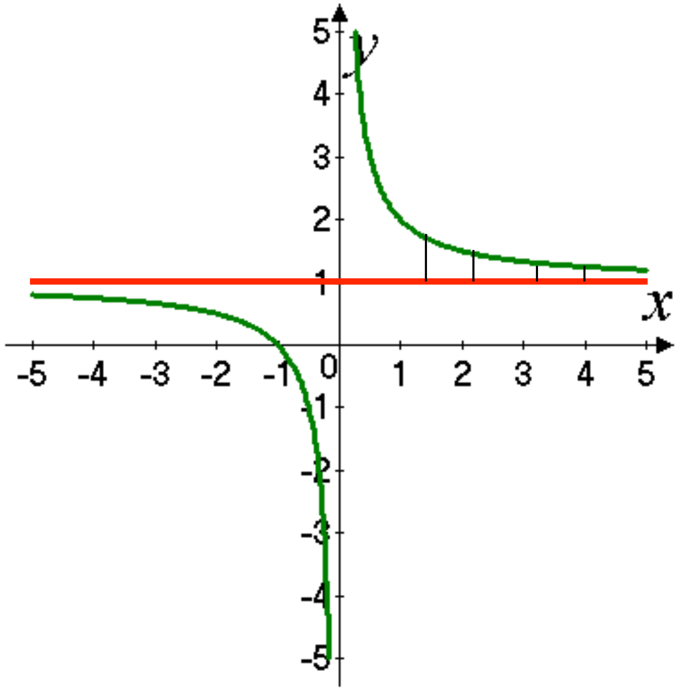
Вертикальные асимптоты

Горизонтальные асимптоты

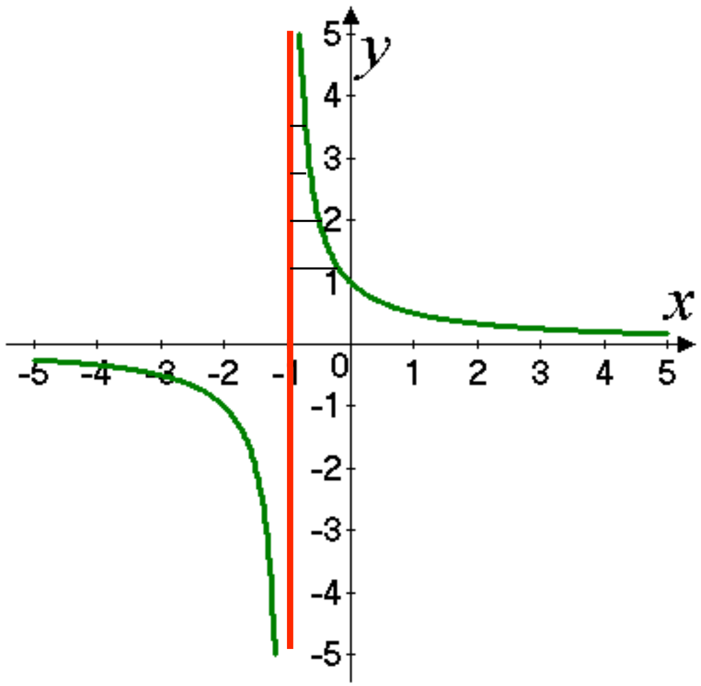
Наклонные асимптоты

Асимптота графика функции

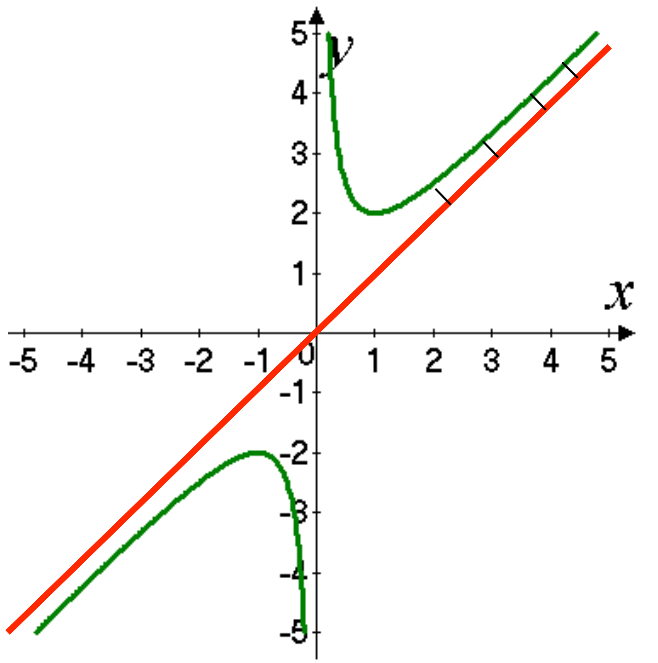
Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние между этой прямой и графиком функции стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат.



Горизонтальная асимптота



Вертикальная асимптота



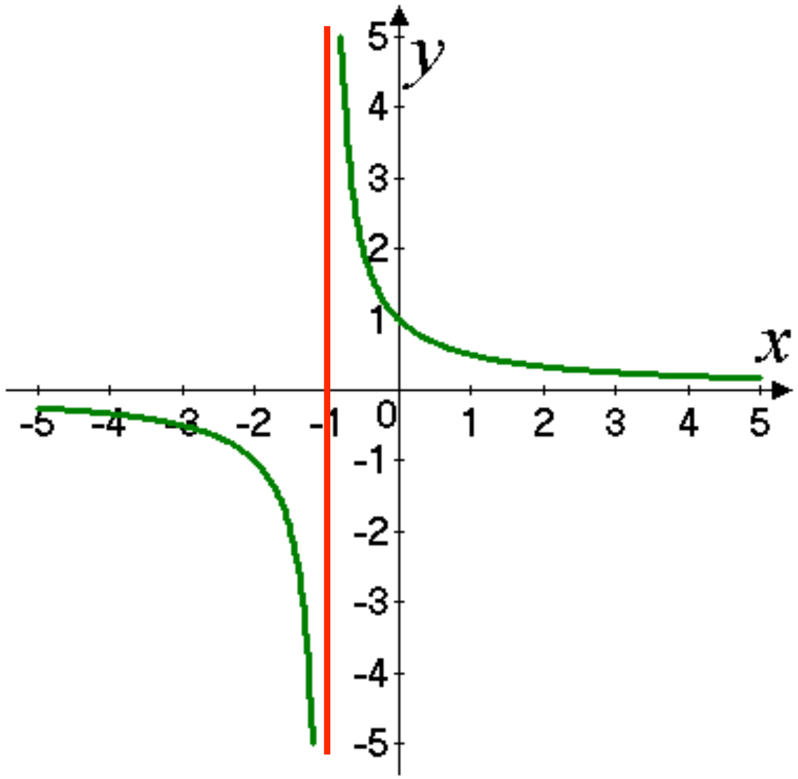
Наклонная асимптота

Вертикальная асимптота

График функции $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет **вертикальную асимптоту**, если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$$

и(или) $$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$



При этом точка $x = a$ есть точка разрыва. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид:

$$x = a$$

Горизонтальная асимптота

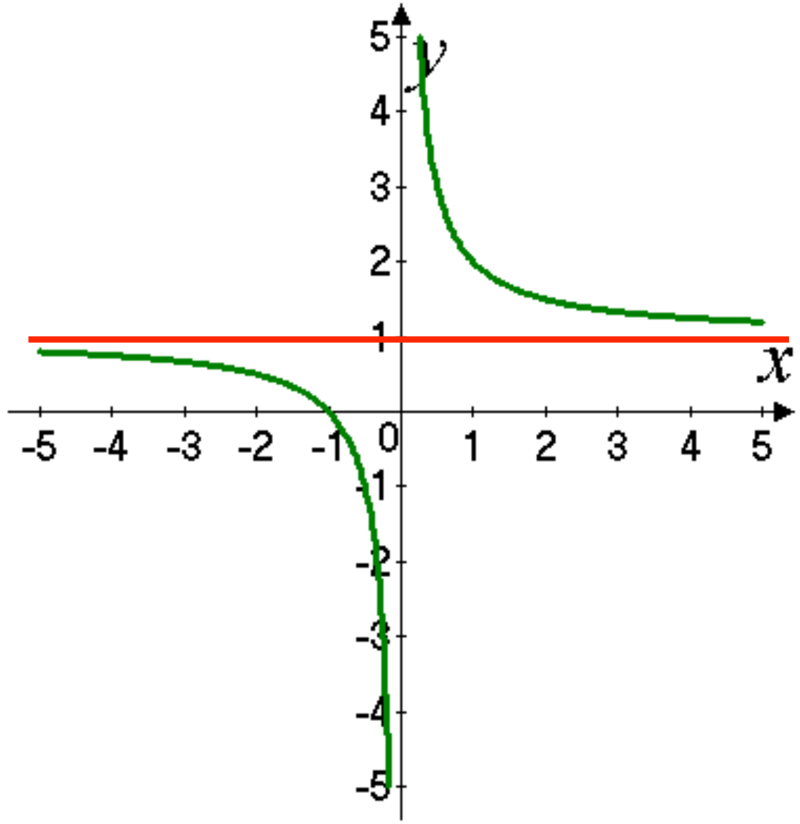
График функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ имеет **горизонтальную асимптоту**, если существует и конечен хотя бы один из пределов:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

и (или) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид:

$$y = b$$



Различают левостороннюю, правостороннюю и двустороннюю горизонтальные асимптоты.

Наклонная асимптота

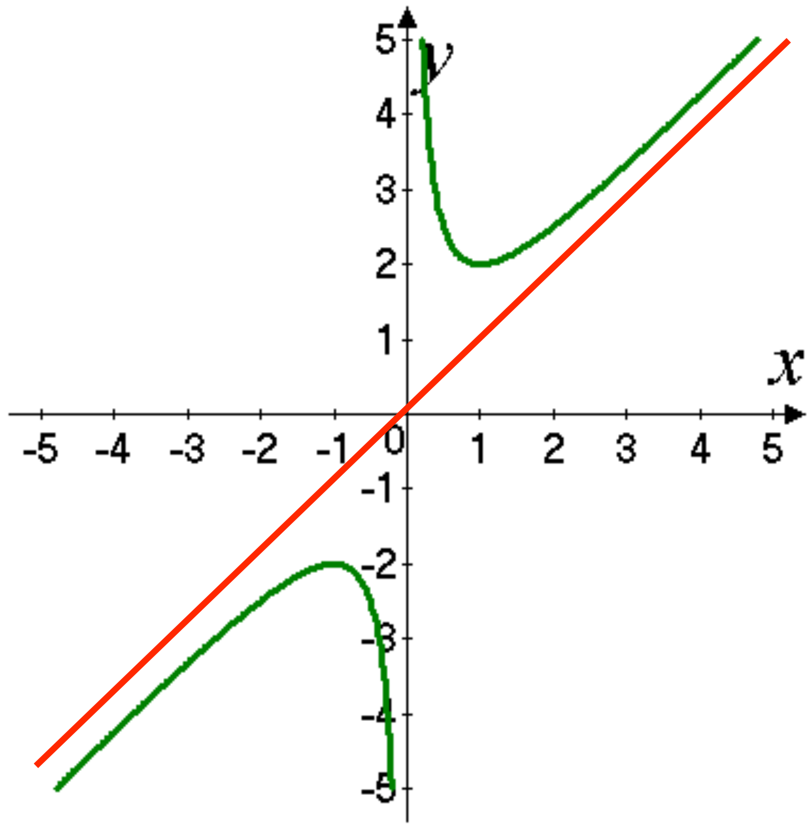
Наклонной асимптотой графика функции называется прямая, задаваемая уравнением

$$y = kx + b$$

Для ее существования необходимо, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$$



Различают левостороннюю, правостороннюю и двустороннюю наклонные асимптоты.

Схема отыскания асимптот

1. **Вертикальные асимптоты**. Если в точке разрыва функции или граничной точке области определения хотя бы один односторонний предел бесконечен, то в этой точке есть вертикальная асимптота.

2. **Горизонтальные асимптоты**. Если предел функции в $\pm\infty$ конечен, то получаем уравнение горизонтальной асимптоты.

3. **Наклонные асимптоты**. Если в в $\pm\infty$ конечного предела нет, то ищем пределы для наклонной асимптоты. Если соответствующие пределы конечны, то получаем уравнение наклонной асимптоты.

7-5.
Построение графиков

Примеры построения графиков

Первый пример

Исследовать функцию

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

Решение.

1. ОДЗ $\quad x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$

2. Функция общего вида (не является четной, нечетной)

Решение

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

3. Поведение функции вблизи точки разрыва и в бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-3} = +\infty$$

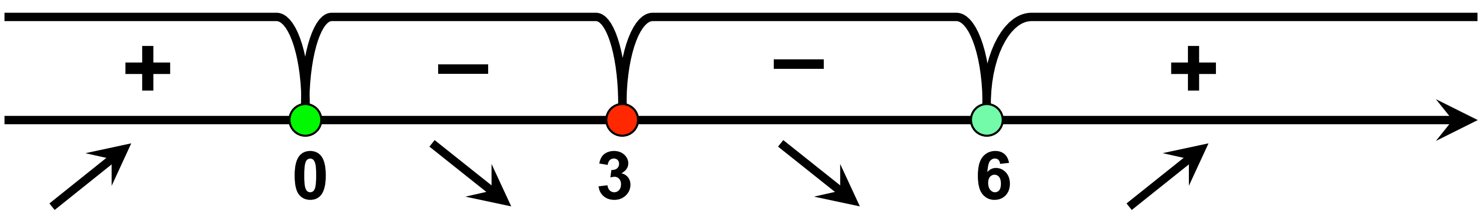
$$\lim_{x\to3-\alpha}\frac{x^2}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to3+\alpha}\frac{x^2}{x-3} = +\infty$$

Решение

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

4. Интервалы монотонности, экстремумы

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$



Решение

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

6. Пересечение с осями в единственной точке (0; 0)

7. Вертикальная асимптота:

$$x = 3$$

Горизонтальных асимптот нет.

Решение

Наклонная асимптота:

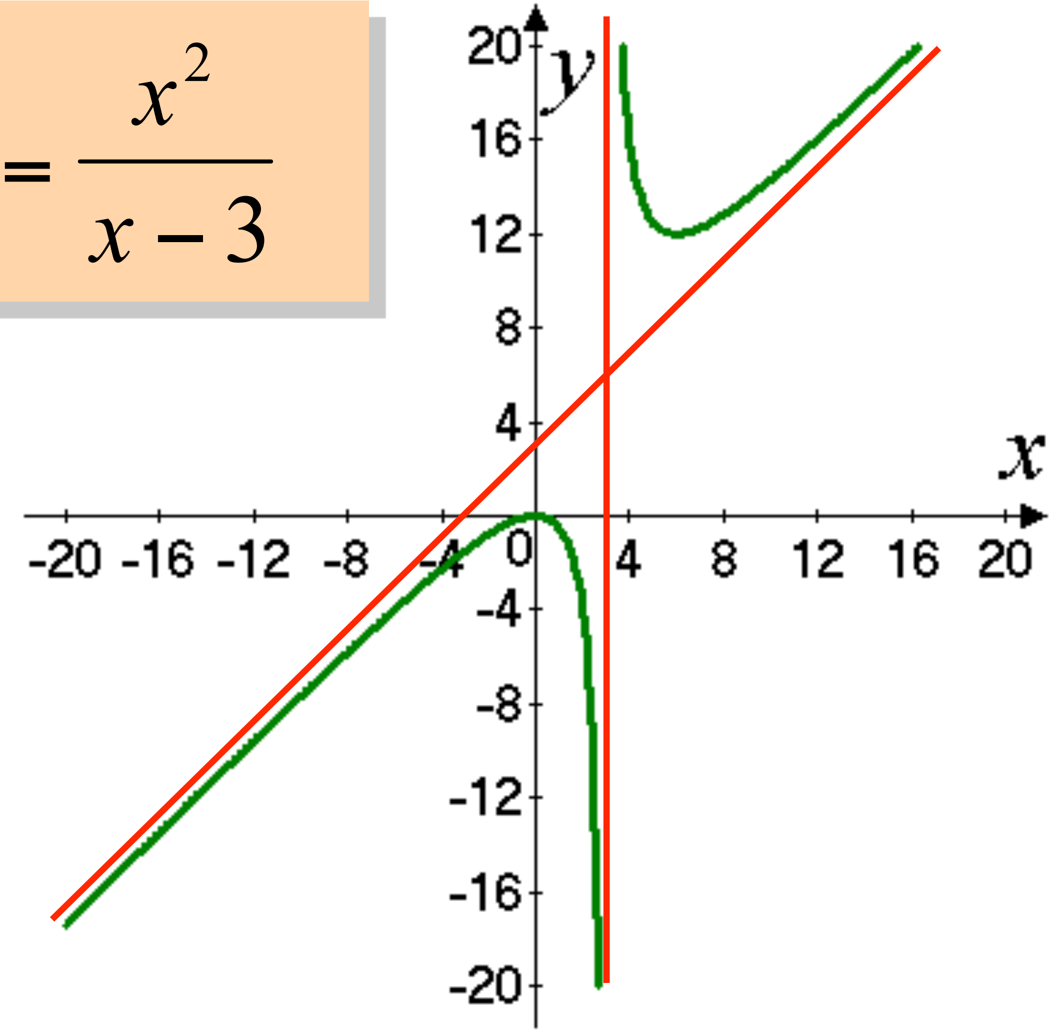
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{x-3} - x \right] = 3$$

$$y = kx + b = x + 3$$

8. Строим график

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$



Второй пример

Исследовать функцию

$$y = x^2 e^{-3x}$$

Решение.

1. ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Функция общего вида (не является четной, нечетной)

Второй пример

$$y = x^2 e^{-3x}$$

3. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-3x} = \infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-3x} = 0$$

4. Монотонность и экстремумы:

$$y' = 2x \cdot e^{-3x} - 3x^2 \cdot e^{-3x} = x(2 - 3x) \cdot e^{-3x}$$

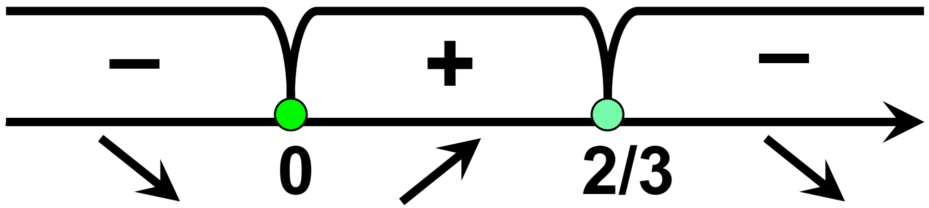
$y' = 0$ при x = 0 и 2/3

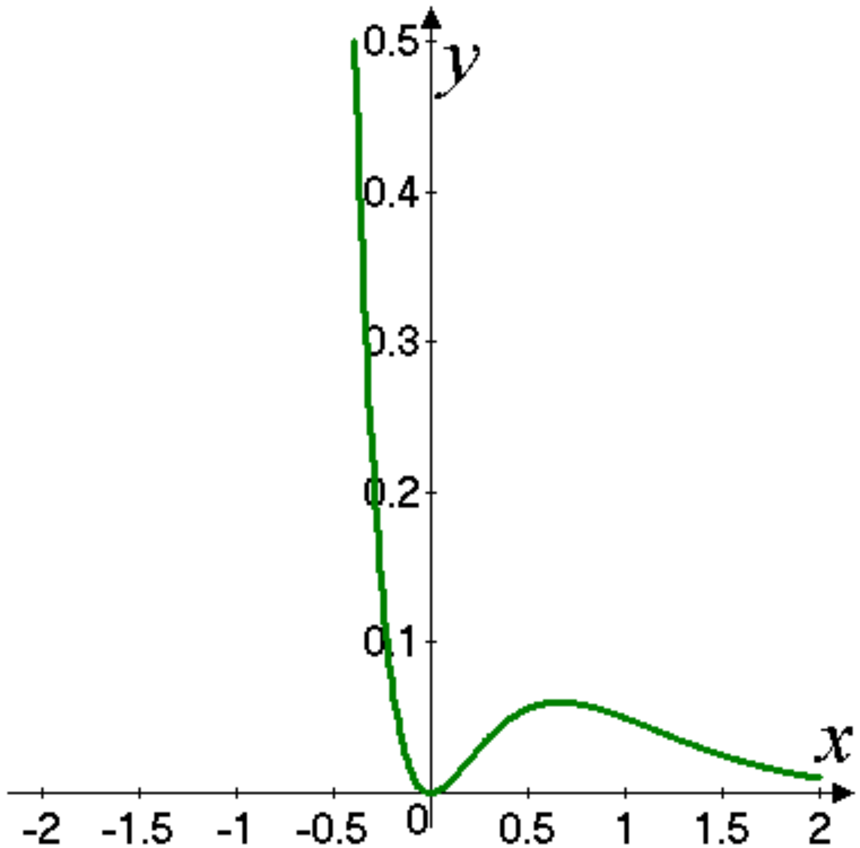
Второй пример

6. Пересечение с осями в точке (0; 0)

7. Горизонтальная асимптота y = 0

8. Строим график

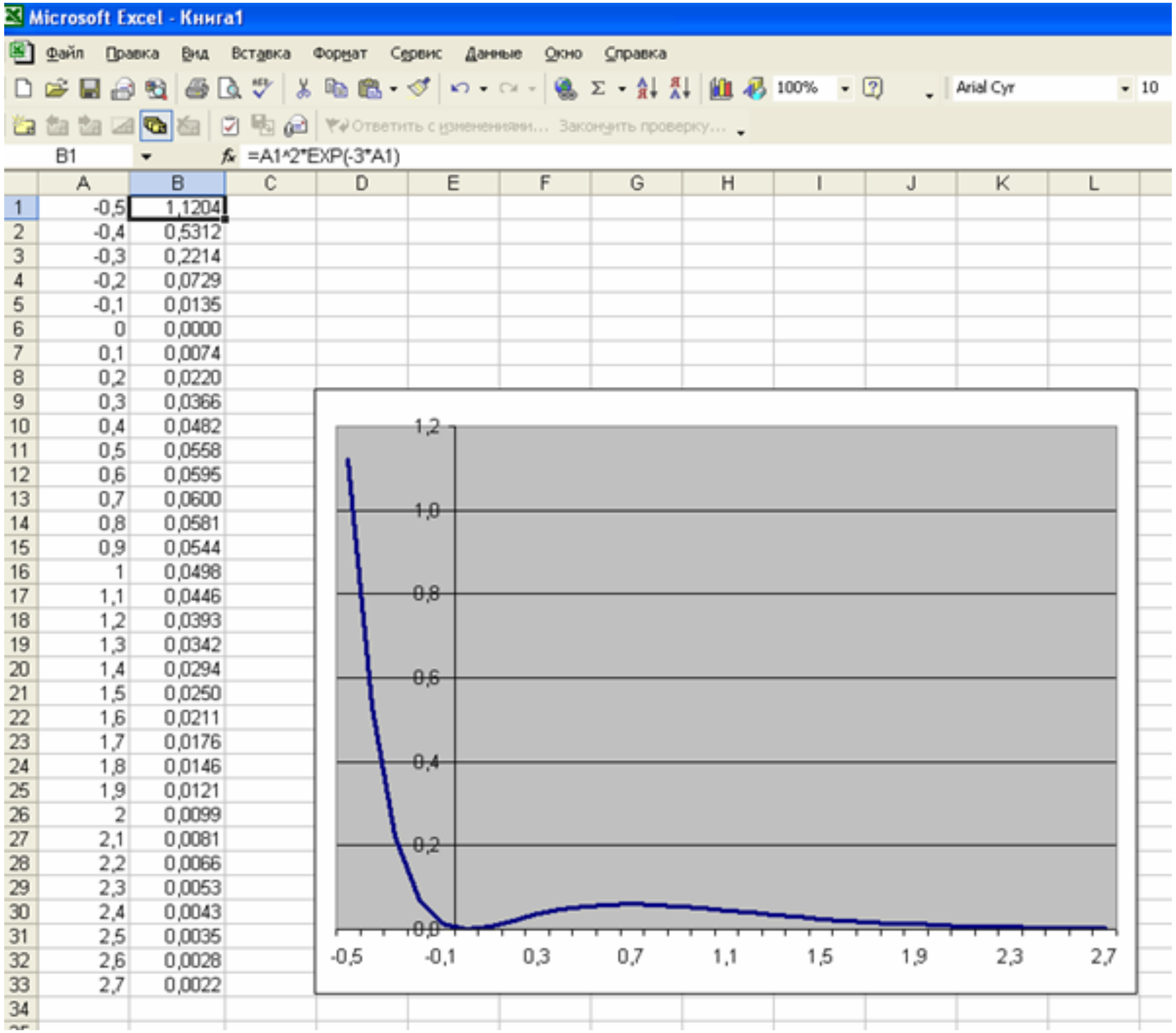




Построение графика в Excel

Для построения графика при помощи Excel требуется вычислить значения функции для значений аргумента, выбранных с некоторым шагом.

Затем выбрать форму графика и определить его параметры.



Новое лекарство. Врачи в клиниках

Будон Р. Место беспорядка. Критика теории социального изменения. 1998.

Исследование процесса диффузии фармакологических новинок проведенное Колеманом и его сотрудниками, выявило одно интересное обстоятельство. Если рассматривать группу врачей работающих в больницах, то можно обнаружить, что процесс диффузии принимает специфический характер. Вначале он весьма неспешен - число медиков, воспринявших новацию, растет медленно. С течением времени процесс ускоряется - число «обращенных» возрастает все более и более высокими темпами. Скорость процесса достигает максимума в тот момент, когда уже примерно половина медиков стала сторонниками новинки. Начиная с этого момента темп процесса последовательно замедляется с тем, чтобы полностью сойти на нет к тому времени, когда *почти* все сообщество превратится в сторонников новшества ...

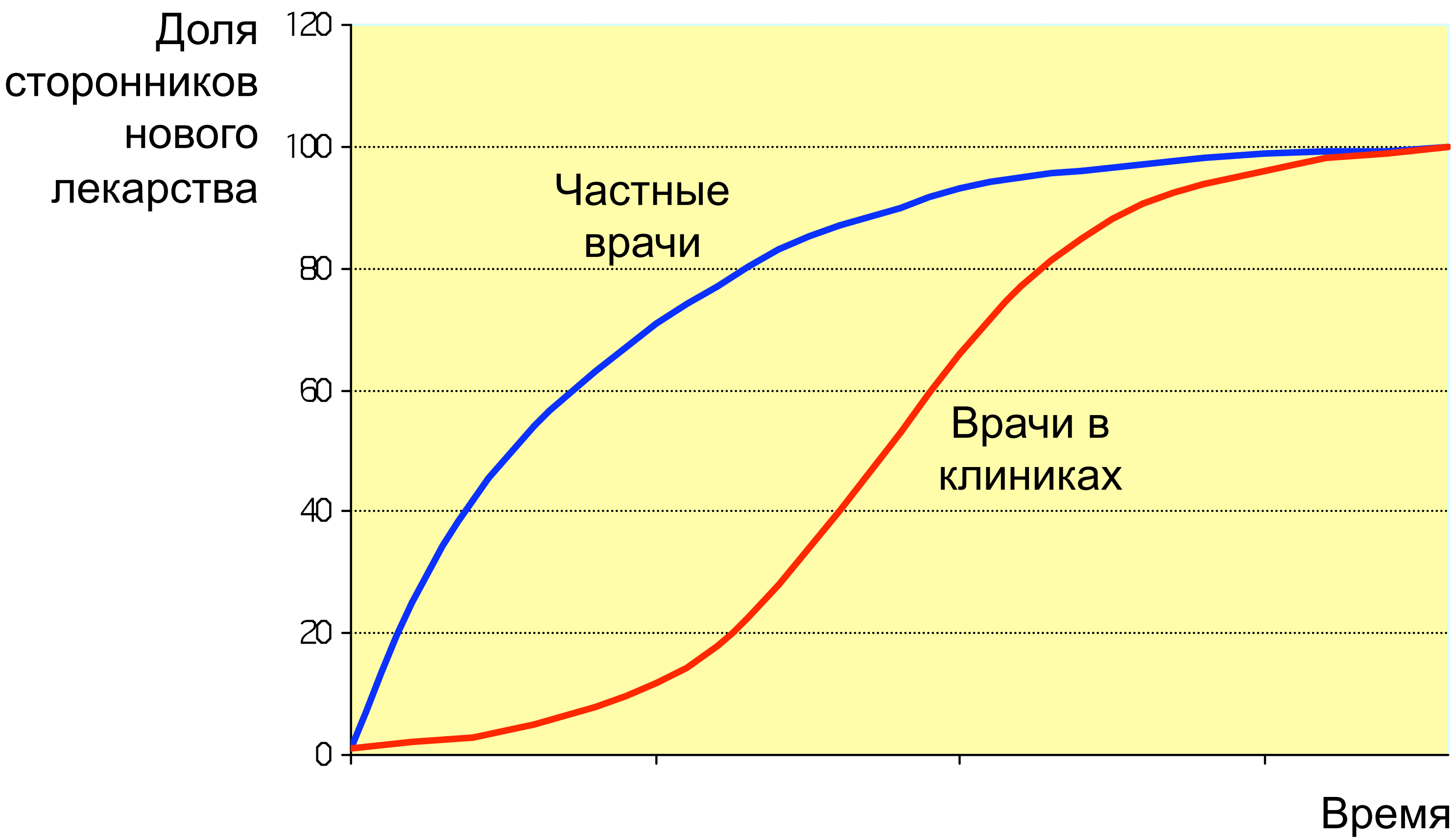
Ссылка: Coleman J., Katz E., Menzel H. Medical Innovation. Diffusion Study. N.Y. 1996.

Новое лекарство. Частные врачи

Будон Р. Место беспорядка. Критика теории социального изменения. 1998.

… эта структура, характерная для врачей, работающих в больницах, неприменима к их коллегам, занятым частной практикой на дому. В последнем случае число принимающих новацию специалистов резко возрастает в самом начале. Затем скорость, с которой новация находит новых сторонников, начинает монотонно снижаться. Скорость все более и более падает по мере того, как новые врачи становятся сторонниками новинки, и, наконец, падает до нуля, когда почти все станут таковыми. Если представить этот процесс в декартовой системе координат, отмечая временные интервалы на оси абсцисс, а численность сторонников новинки в каждый последующий момент времени — на оси ординат, то получим фигуру, напоминающую уже не 8-образную линию, а вытянутую в форме дуги.

Кривая насыщения и логистическая кривая



Поведение новаторов и консерваторов различно. Синяя кривая называется **кривой насыщения**, красная – **логистической кривой**.

Формулы кривых

Кривая насыщения:

$$S(t) = A_0 - e^{-t}$$

или $$S(t) = A_0 - 1/t$$

Логистическая кривая:

$$S(t) = A_0 / (1 + e^{-t})$$

Обе кривые часто используются для описания или моделирования социокультурных процессов.